§6 留数及其应用

§6.1 留数

一、留数定义及其求法

1、定义

Def. 设 $f(z)$ 以 $z=a$ 为孤立奇点，记 $\Gamma_\rho: |z-a|=\rho$（ρ 很小），称积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz$ 为 $f(z)$ 在孤立奇点 $z=a$ 的留数，记作 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

Rem. 若 $z=a$ 是 $f(z)$ 的解析点或可去奇点，则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=0$.

2. 留数的求法

Thm 1. 设 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的 Laurent 展式为 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$，则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1}$.

Pf. 记 $\Gamma_\rho: |z-a|=\rho$，ρ 很小，$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$，两边积分：

$$\oint_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \oint_{\Gamma_\rho}(z-a)^n\,dz = 0 + C_{-1}\cdot 2\pi i + 0$$

根据留数定义，$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = C_{-1}$.

例如，$\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 1$，$\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z^2}} = 0$，$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2} = 1$，$\operatorname*{Res}_{z=0} \cos\frac{1}{z} = 0$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^n} = \frac{1}{(n-1)!}$$

例1 求 $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z\sin z}{(e^z-1)^3}$

Sol. $\frac{z\sin z}{(e^z-1)^3} = \frac{z(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)}{(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)^3} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1-\frac{z^2}{3!}+\cdots}{(1+\frac{z}{2!}+\cdots)^3} = \frac{1}{z}\cdot(1+C_0 z+\cdots)$

于是 $C_{-1}=1$，$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z\sin z}{(e^z-1)^3} = 1$

Thm 2. 设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$ 以 $z=a$ 为 m 级极点，这里 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 解析且 $\varphi(a)\neq 0$，$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\dfrac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}=\dfrac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}\Big|_{z=a}$.

Pf. $$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}\,dz=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$
$$=\frac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}\Big|_{z=a}.$$

例2 求下列留数：

(1) $\operatorname*{Res}_{z=1}\dfrac{e^z}{(z-1)^3}=\dfrac{1}{2!}(e^z)''\Big|_{z=1}=\dfrac{e}{2}$

(2) $\operatorname*{Res}_{z=1}\dfrac{\sin z}{(z-1)^5}=\dfrac{1}{4!}(\sin z)^{(4)}\Big|_{z=1}=\dfrac{\sin 1}{24}$

(3) $\operatorname*{Res}_{z=i}\dfrac{1}{(z^2+1)^n}=\dfrac{1}{(n-1)!}\left(\dfrac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)}\Big|_{z=i}=\dfrac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\cdot\dfrac{1}{2^{2n-1}i^{2n-1}}$
$=\dfrac{-n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!\cdot 2^{2n-1}}i$

Cor. 若 $f(z)$ 以 $z=a$ 为1级极点，则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$

例如，$\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{z\sin z}{(e^z-1)^3}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2\sin z}{(e^z-1)^3}\xlongequal{\text{等价}}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^3}{z^3}=1.$

Thm 3. 设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，其中 $\varphi(z),\psi(z)$ 都在 $z=a$ 解析且 $\varphi(a)\neq 0,\psi(a)=0$ 及 $\psi'(a)\neq 0$，则 $\operatorname*{Res}_{z=a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

Pf. $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 以 $z=a$ 为1级极点，由 Thm.2，$\operatorname*{Res}_{z=a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim\limits_{z\to a}(z-a)\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$
$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(a)}{\frac{\psi(z)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

例3 求下列留数：

(1) $\operatorname*{Res}_{z=i}\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{(z^2+1)'}\Big|_{z=i}=\dfrac{1}{2i}$

(2) $\operatorname*{Res}_{z=-1}\dfrac{1}{z^5+1}=\dfrac{1}{(z^5+1)'}\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{5}$

(3) $\operatorname*{Res}_{z=i}\dfrac{1}{z^6+1}=\dfrac{1}{6z^5}\Big|_{z=i}=\dfrac{1}{6i}$

(4) $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\sin z}{z^5+1} = \frac{\sin z}{5z^4}\Big|_{z=-1} = -\frac{\sin 1}{5}$

二. 用留数计算围线积分

Thm 4. (留数定理)

设 $f(z)$ 在围线 C 所围区域内除了 n 个孤立奇点 $a_1, \cdots, a_n$ 外解析, 且 $f(z)$ 在 C 上连续, 则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$.

Pf. 以 a_k 为圆心作小圆 $\Gamma_{\rho_k}: |z-a_k| = \rho_k$, ρ_k 很小使 Γ_{ρ_k} 含在 C 内且互不相交、互不包含. C 与 n 个 Γ_ρ 组合成复围线 $C+\Gamma_{\rho_1}^{-1}+\cdots+\Gamma_{\rho_n}^{-1}$

由复围线上的 Cauchy 积分公式,

$$\oint_{C+\Gamma_{\rho_1}^{-1}+\cdots+\Gamma_{\rho_n}^{-1}} f(z)dz = 0, \text{ 则 } \oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\Gamma_{\rho_k}} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Rem. 留数定理中的围线 C 可以推广为复围线

例4 (1) $$\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)^2}dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{5z-1}{z(z-1)^2} + \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{5z-1}{z(z-1)^2}\right)$$

$$= 2\pi i(-1+1) = 0.$$

(2) $$\oint_{|z|=n} \tan\pi z \, dz$$

$f(z) = \tan\pi z = \frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 以 $z = k+\frac{1}{2}$ 为1级极点, 由 Thm.3,

$$\operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \tan\pi z = \operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi z}{\cos\pi z} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\oint_{|z|=n} \tan\pi z \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{|z|<n} \operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \tan\pi z = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cdot 2n = (-n) \cdot 4i$$

三、孤立奇点 ∞ 的留数

1. 定义

Def. 设 $f(z)$ 以 ∞ 为孤立奇点, 取 $\Gamma_\rho: |z| = \rho$, ρ 很大, 称积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho^{-1}} f(z)dz$ 为 $f(z)$ 在 ∞ 的留数.

2. ∞ 留数的求法

Thm 5. 设 $f(z)$ 在孤立奇点 ∞ 的 Laurent 级数为 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n z^n \ (|z|>r)$

则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$.

Pf. 由于 $\oint_{T_\rho} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n\neq -1 \end{cases}$，其中 $T_\rho: |z|=\rho$ (ρ很大)

$f(z)=\sum_{+\infty}^{-\infty} C_n z^n$ 两边积分，$\oint_{T_\rho} f(z)dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \oint_{T_\rho} z^n dz = 2\pi i\cdot C_{-1}$

于是 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{T_\rho} f(z)dz = C_{-1}$，$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{T_\rho^{-1}} f(z)dz = -C_{-1}$.

例如，(1) $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = C_{-1} = 1$，$\operatorname*{Res}_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}} = -C_{-1} = -1$.

(2) $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \sin z = -C_{-1} = 0$.

(3) $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \sin\frac{1}{z} = -C_{-1} = -1$

(4) $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \sin\frac{1}{z^3} = -C_{-1} = 0$.

3. 关于 ∞ 的留数定理

Thm 6. 设 $f(z)$ 在 z 平面上除了有 n 个点 $a_1,\cdots,a_n$ 外解析，则

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Pf. 记 $T_\rho: |z|=\rho$，ρ 很大使 n 个 a_k 均含在 T_ρ 内.

根据 Thm 4.，$\oint_{T_\rho} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{T_\rho} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$

根据留数定义，$-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$，则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) = 0$

例5 计算 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^2+1}{z(z-1)(z-2)(z-3)}$

Sol. 由 Thm 6.，$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^2+1}{z(z-1)(z-2)(z-3)} = -\sum_{k=0}^{3}\operatorname*{Res}_{z=k} \frac{z^2+1}{z(z-1)(z-2)(z-3)}$

$= -\left(-\frac{1}{6}+1-\frac{5}{2}+\frac{10}{6}\right) = 0$